

Gaussian and Parametric Solutions Refresher

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

Gaussian and Parametric Solutions Refresher

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \xrightarrow{r'_2 = -4r_1 + r_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 \cdot 1 + 4 & -4 \cdot 2 + 5 & -4 \cdot 3 + 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

Gaussian and Parametric Solutions Refresher

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \xrightarrow{r'_2 = -4r_1 + r_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 \cdot 1 + 4 & -4 \cdot 2 + 5 & -4 \cdot 3 + 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \xrightarrow{r'_3 = -7r_1 + r_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ -7 \cdot 1 + 7 & -7 \cdot 2 + 8 & -7 \cdot 3 + 9 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{bmatrix}$$

Gaussian and Parametric Solutions Refresher

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \xrightarrow{r'_2 = -4r_1 + r_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 \cdot 1 + 4 & -4 \cdot 2 + 5 & -4 \cdot 3 + 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \xrightarrow{r'_3 = -7r_1 + r_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ -7 \cdot 1 + 7 & -7 \cdot 2 + 8 & -7 \cdot 3 + 9 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{bmatrix} \xrightarrow{r'_3 = -2r_2 + r_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Back substitution

row 2: $-3x_2 = -6$ so $x_2 = 2$

Gaussian and Parametric Solutions Refresher

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \xrightarrow{r'_2 = -4r_1 + r_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 \cdot 1 + 4 & -4 \cdot 2 + 5 & -4 \cdot 3 + 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \xrightarrow{r'_3 = -7r_1 + r_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ -7 \cdot 1 + 7 & -7 \cdot 2 + 8 & -7 \cdot 3 + 9 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{bmatrix} \xrightarrow{r'_3 = -2r_2 + r_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Back substitution

row 2: $-3x_2 = -6$ so $x_2 = 2$

row 1: $x_1 + 2x_2 = 3$ so $x_1 = 3 - 2(2) = -1$. Hence $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$



$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 4 & 5 & 6 & 9 \\ 7 & 8 & 9 & 15 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{r'_2 = -4r_1 + r_2 \\ r'_3 = -7r_1 + r_3}}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ -4 \cdot 1 + 4 & -4 \cdot 2 + 5 & -4 \cdot 3 + 6 & -4 \cdot 3 + 9 \\ -7 \cdot 1 + 7 & -7 \cdot 2 + 8 & -7 \cdot 3 + 9 & -7 \cdot 3 + 15 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & -3 & -6 & -3 \\ 0 & -6 & -12 & -6 \end{bmatrix} \xrightarrow{r'_3 = -2r_2 + r_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & -3 & -6 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 4 & 5 & 6 & 9 \\ 7 & 8 & 9 & 15 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{r'_2 = -4r_1 + r_2 \\ r'_3 = -7r_1 + r_3}}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ -4 \cdot 1 + 4 & -4 \cdot 2 + 5 & -4 \cdot 3 + 6 & -4 \cdot 3 + 9 \\ -7 \cdot 1 + 7 & -7 \cdot 2 + 8 & -7 \cdot 3 + 9 & -7 \cdot 3 + 15 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & -3 & -6 & -3 \\ 0 & -6 & -12 & -6 \end{bmatrix} \xrightarrow{r'_3 = -2r_2 + r_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & -3 & -6 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

x_3 has no pivot so it is a parameter t . Then backsubstitute variables attached to pivots in terms of parameters:

row 2: $-3x_2 - 6x_3 = -3$ so $-3x_2 - 6t = -3$, i.e. $x_2 = 1 - 2t$

row 1: $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 3$ so $x_1 + 2(1 - 2t) + 3(t) = 3$, i.e.

$x_1 = 3 - 2(1 - 2t) - 3t = 1 + t$

$$\text{Hence } \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + t \\ 1 - 2t \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ -2t \\ t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$